CONCOURS COMMUN I.N.A. E.N.S.A. 1979

MATHÉMATIQUES

(Option générale)

PREMIÈRE COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

I

Dans cette partie on étudiera l'existence de nombres $z \in \mathbb{C}$ vérifiant l'équation

(I) $z = ae^z$ (a réel donné).

Les résultats donnés dans l'énoncé pourront être utilisés dans la partie II même si cette partie I n'a pas été complètement traitée.

1° Existence de solutions réelles.

Étudier les variations de la fonction réelle définie par $x \longmapsto xe^{-x}$.

En déduire suivant les valeurs de a le nombre de solutions réelles de l'équation (I).

2° Existence de solutions non réelles, $z = x + iy$ $(y \neq 0)$.

Former pour ces solutions deux équations liant x, y et a et donner une relation entre y et a.

Étudier les variations de la fonction φ définie par

$$\varphi(t) = \frac{\sin t}{t} e^{t \cot t}$$

(pour l'étude du signe de la dérivée de φ on conseille de faire intervenir la fonction $\psi : t \longmapsto t \sin 2t - t^2 - \sin^2 t$).

En déduire que, quel que soit a, l'équation (I) a une infinité de solutions non réelles.

II

On suppose l'existence de fonctions numériques f, dérivables et vérifiant la condition

(C) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = kf(a - x)$

(a, k réels donnés; $k \neq 0$).

Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre et intégrer cette équation.

En déduire qu'il existe des fonctions vérifiant la condition (C) et les donner toutes.

III

On note E l'ensemble des fonctions numériques g, dérivables et vérifiant la condition

(C') $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = g(a + x)$ (a réel donné, non nul).

1° Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, que g est indéfiniment dérivable et que quel que soit $n \in \mathbb{N}$ $g^{(n)} \in \mathrm{E}$.

2° Déterminer une condition portant sur a pour qu'il existe dans E des fonctions g non nulles telles que le système (g, g') soit lié. (On pourra utiliser les résultats du I. 1°.)

Caractériser les valeurs de a pour lesquelles l'ensemble de ces fonctions est un sous-espace de E.

3° Montrer qu'il existe dans E une infinité de fonctions g telles que le système (g, g', g'') soit lié sans que le système (g, g') le soit. (On utilisera les résultats de I. 2°; on conseille d'utiliser, lorsque le cas se présentera, la notation e^{rz} $(r \in \mathbb{C})$ pour certaines fonctions.)

IV

Soit u l'application « dérivée » définie dans l'espace E ci-dessus par $u(g) = g'$.

1° Montrer que u est un endomorphisme injectif.

Soit $g \in \mathrm{E}$ et G définie par

$$G(x) = k + \int_a^x g(t)\, dt \quad (k \text{ constante}).$$

Déterminer k pour que $G \in E$ et en déduire que u est bijectif.

2° Déterminer un nombre α non nul tel que les fonctions g_1 et g_2 définies par

$$g_1(x) = e^{\alpha x} \cos \alpha x \qquad g_2(x) = e^{\alpha x} \sin \alpha x$$

vérifient la condition (C') de III. Quelle est la valeur de a associée au nombre α choisi?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail